6.10 Rechnen mit Potenzen – Analyse eigener Stärken und Schwächen anhand sehr variationsreicher Aufgaben

Thema der Unterrichtsstunde

Rund um Potenzen – Bearbeitung einer Checkliste mit unterschiedlichen Kompetenzbereichen zum Thema „Potenzen“ zur Durchführung einer Selbstdiagnose in Vorbereitung auf eine Klassenarbeit (Doppelstunde)

Unterrichtsmaterial

- Checkliste mit Selbsteinschätzung zum Thema „Potenzen“
- Lösungen zu der Checkliste „Potenzen“
- Hilfen

Checkliste mit Selbsteinschätzung zum Thema „Potenzen“

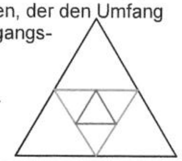
Anhand der Checkliste kannst du überprüfen, ob Du alles, was für das Thema „Potenzen“ und damit auch für die Klassenarbeit wichtig ist, beherrschst.
Du kannst die Beispielaufgaben lösen und dann ankreuzen, ob Du sie ohne Hilfe lösen konntest, ob Du erst auf den Hilfekarten nachschauen musstest oder ob Du diese Aufgabe gar nicht lösen konntest. Wenn Du etwas noch nicht verstanden hast, notiere deine Fragen. In der Folgestunde ist Zeit für die Klärung von Problemen.

Einschätzung: ☺ Ich kann die Aufgabe lösen.
😐 Ich kann die Aufgabe mit Hilfe lösen und/oder fühle mich unsicher.
☹ Ich habe die Aufgabe nicht ganz verstanden.

Die kursiv geschriebenen Aufgabenteile mit Sternchen sind für die schnellen Rechner, die mit allen anderen Aufgaben bereits fertig sind.

Kürzel: **D = Definition** **T = Tabelle** **PG = Potenzgesetze** **G = Gesetz** **H = Hinweis**

Bereich	Fähigkeit	Aufgaben	Hilfen	Einschätzung ☺	😐	☹	offene Fragen
Grundlagen	Ich kann die Begriffe Exponent, Basis und Potenz unterscheiden, habe eine Vorstellung von dem, was hinter dem Potenzausdruck steht, und was die Definition von a^n und a^{-n} ($a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$) bedeutet.	Setze das passende Zeichen <, > oder = . $2^4 \square 2^5$, $3^0 \square 7^0$, $4^2 \square 2^4$, $(1/2)^4 \square (1/2)^3$, $(-2)^2 \square -2^2$, $(1/2)^{-3} \square 2^3$, $(-2)^3 \square (-3)^2$	1 (D)				
Einheiten	Ich kann Längen- und Gewichtseinheiten umrechnen.	Rechne in die angegebene Einheit um. a) 30211000000 cm = km b) 0,000000876 kg = mg	2 (T)				
10er-Potenzen	Ich kann Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise lesen und schreiben.	Drücke sinnvoll in Zehnerpotenzschreibweise aus. a) 260 570 000 000 000 = b) 0,000 000 098 760 = Schreibe die Zahl in Worten aus: c) 14 120 300 001	3 (T)				
	Ich kann mit Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise rechnen und Einheiten zum Lösen der Aufgabe sinnvoll umrechnen.	Ein Haar wächst im Durchschnitt $3 \cdot 10^{-9}$ m/s. Berechne wie viele mm ein Haar pro Tag wächst.	2 3 4 (H)				
Potenzgesetze	Ich kenne die Rechengesetze für **Potenzen mit gleicher Basis** und kann diese anwenden.	a) $(x+y)^5 \cdot (x+y)^{-4} =$ b) $u^m \cdot m^u \cdot u^{2m} \cdot m^{-u} \cdot u^{-3m} =$ **c) $7a^3 \cdot 6a^2 \cdot 3^{-1}a^{-4} =$*	5 (PG) 6 (H)				
	Ich kenne die Rechengesetze für **Potenzen mit gleichen Exponenten** und kann diese anwenden.	Vereinfache. d) $(1/2)^3 \cdot a^{-2} \cdot 2 \cdot b^2 \cdot a^2 =$ e) $u^m \cdot n^u \cdot u^{-u} \cdot m^m \cdot 2u^{-m} =$	7 (PG) 6				
	Ich kenne die Rechengesetze zum **Potenzieren von Potenzen** und kann diese anwenden.	Fasse zusammen. f) $(-a^3)^{-2} =$ g) $((r^{-5})^{-3})^2 =$	8 (PG)				
	Ich kann **komplexe Potenzterme** unter Anwendung der Potenzgesetze vereinfachen und ggf. berechnen.	Fasse zusammen bzw. löse die Klammern auf. h) $(ab)^{-2}\,(1/a)^{-2} + (a^3)^{-2} - (a^{-2})^3 =$ **i) $(4r^2 - 7s^3 + r^{-5}) \cdot (3s^3 + 5r^2) =$*	1, 5, 6, 7, 8 **9(G)*				

Bereich	Fähigkeit	Aufgaben	Hilfen	Einschätzung			offene Fragen
				☺	😐	☹	
Modellieren	Ich kann Terme mit Potenzen im **innermathematischen Kontext** aufstellen und dadurch die Aufgabe lösen.	a) Das äußere gleichseitige Dreieck hat eine Seitenlänge von 32 cm. Berechne den Umfang der drei Dreiecke U_0, U_1 und U_2. Wie verändert sich der Umfang? Kannst du einen allgemeinen Term angeben, der den Umfang von einem beliebigen k-ten Innendreieck mit einem Ausgangsdreieck mit einer beliebigen Seitenlänge a angibt?  *b) *Gib einen Term zur Berechnung der Flächeninhalte der weiteren Dreiecke an, wenn die Höhe des Ausgangsdreiecks $16 \cdot \sqrt{3}$ cm beträgt.*	10(H) *11(H)				
	Ich kann Terme mit Potenzen im **außermathematischen Kontext** aufstellen und dadurch die Aufgabe lösen.	c) Bei Messungen am beschädigten Kernkraftwerk Fukushima sind Spuren von Plutonium entdeckt worden. Der Kraftwerksbetreiber Tepco hatte zuvor Bodenproben vom Gelände der Anlage von unabhängigen Spezialisten auf das hochgiftige Schwermetall untersuchen lassen. In Fukushima gilt Block 3 als besonders gefährlich, weil es sich bei dessen Brennelementen um Plutonium-Uran-Mischoxide (MOX) handelt. Das radioaktive Plutonium hat eine Halbwertszeit von ca. 24.000 Jahren. Angenommen die freigesetzte Menge beträgt 25 kg. Wie hoch ist nach 120.000 Jahren noch der Plutoniumgehalt? Kannst du eine allgemeine Formel für die Menge in Abhängigkeit der Zeit aufstellen? * *Wie viel ist noch vorhanden, wenn du 80 Jahre alt sein wirst? Interpretiere dein Ergebnis im Sachzusammenhang und schreibe einen kurzen Kommentar.* !!! <u>Zusatzinformationen:</u> Schon die Einnahme einer Menge im zweistelligen Milligramm-Bereich gilt als tödlich. Noch gefährlicher ist allerdings die radioaktive Strahlung von Plutonium. Wird der Stoff eingeatmet, genügt vermutlich schon eine Menge von wenigen Mikrogramm, um Krebs auszulösen. Die Alphastrahlung des Plutoniums kann zwar nicht die Haut durchdringen, im Innern des Körpers aber schwere Strahlenschäden verursachen - insbesondere an den Knochen und in der Leber. *d) *Harry Potters Freunde, die Weasley-Zwillinge erfinden „Schrumpffix". Wer mit diesem Mittel angesprüht wird, hat nach einem Tag nur noch ein Drittel seiner ursprünglichen Größe. Das geht immer so weiter. Es gelingt ihnen, Draco, den Slytherin-Schüler, anzusprühen, der eine Größe von 1,68 m hat. Gib eine allgemeine Formel für die Schrumpfung an. An welchem Tag wird Draco kleiner als 1 mm? [Lösung durch probieren!]*	12 (H) *13 (H)				

Kommentar zur Methode:

Lösungen zu der Checkliste „Potenzen"

Grundlagen

$2^4 \boxed{<} 2^5$ $\quad$ $3^0 \boxed{=} 7^0$ $\quad$ $4^2 \boxed{=} 2^4$ $\quad$ $(1/2)^4 \boxed{<} (1/2)^3$

$(-2)^2 \boxed{>} -2^2$ $\quad$ $(1/2)^{-3} \boxed{=} 2^3$ $\quad$ $(-2)^3 \boxed{<} (-3)^2$

Einheiten

a) 30211000000 cm = $\boxed{\textbf{302 110 km}}$ $\qquad$ b) 0,000000876 kg = $\boxed{\textbf{0,876 mg}}$

10er-Potenzen

a) 260 570 000 000 000 = **2,6057 · 10^{14}** [alternative Lösungen möglich wie z.B. 26 057 · 10^{10}]
b) 0,000 000 098 760 = **9,876 · 10^{-8}** [alternative Lösungen möglich wie z.B. 9876 · 10^{-11}]
c) 14 120 300 001 in Worten: **14 Milliarden 120 Millionen 300 Tausend und 1**

Potenzgesetze: [alternative Rechenwege sind möglich]

a) $(x+y)^5 \cdot (x+y)^{-4} = \boxed{(x+y)}$

b) $u^m \cdot m^u \cdot u^{2m} \cdot m^{-u} \cdot u^{-3m} = u^m \cdot u^{2m} \cdot u^{-3m} \cdot m^u \cdot m^{-u} = u^{m+2m-3m} \cdot m^{u-u} = u^0 \cdot m^0 = 1 \cdot 1 = \boxed{1}$

c) $7a^3 \cdot 6a^2 \cdot 3^{-1}a^{-4} = 7 \cdot 6 \cdot 3^{-1} \cdot a^3\, a^2\, a^{-4} = \frac{7 \cdot 6}{3} \cdot \frac{a^3 \cdot a^2}{a^4} = 7 \cdot 2 \cdot \frac{a^5}{a^4} = \boxed{14\,a}$

d) $(1/2)^3 \cdot a^{-2} \cdot 2 \cdot b^2 \cdot a^2 = \frac{1^3}{2^3} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot 2 \cdot b^2 \cdot a^2 = \frac{2}{2^3} \cdot \frac{b^2 \cdot a^2}{a^2} = \frac{1}{2^2} \cdot b^2 = \boxed{(\frac{b}{2})^2}$

e) $u^m \cdot n^u \cdot u^{-u} \cdot m^m \cdot 2u^{-m} = 2\,u^m \cdot m^m \cdot u^{-m} \cdot n^u \cdot u^{-u} = 2\,\frac{u^m \cdot m^m}{u^m} \cdot \frac{n^u}{u^u} = \boxed{2\,m^m \cdot (n/u)^u}$

f) $(-(a^3))^{-2} = \boxed{a^{-6}}$

g) $((r^{-5})^{-3})^2 = r^{(-5)\cdot(-3)\cdot 2} = \boxed{r^{30}}$

h) $(ab)^{-2}\,(1/a)^{-2} + (a^3)^{-2} - (a^{-2})^3 = \frac{1}{(ab)^2} \cdot a^2 + a^{3\cdot(-2)} - a^{(-2)\cdot 3} = \frac{a^2}{a^2b^2} + a^{-6} - a^{-6} = \frac{1}{b^2} = \boxed{b^{-2}}$

i) $(4r^2 - 7s^3 + r^{-5}) \cdot (3s^3 + 5r^2) = 12\,r^2s^3 + 20\,r^2r^2 - 21\,s^3s^3 - 35\,s^3r^2 + 3\,r^{-5}s^3 + 5\,r^{-5}r^2 =$

$12\,r^2s^3 - 35\,s^3r^2 + 20\,r^4 - 21\,s^6 + 3\,r^{-5}s^3 + 5\,r^{-3} = (12-35)\,r^2s^3 + 20\,r^4 - 21\,s^6 + 3\,r^{-5}s^3 + 5\,r^{-3} =$

$\boxed{-23\,r^2s^3 + 20\,r^4 - 21\,s^6 + 3\,r^{-5}s^3 + 5\,r^{-3}}$

Modellieren

a) $U_0 = 3 \cdot 32\text{cm} = \boxed{96\text{cm}}$, $U_1 = 3 \cdot (\frac{1}{2}) \cdot 32\text{cm} = \boxed{48\text{cm}}$ $U_2 = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot 32\text{cm} = \boxed{24\text{ cm}}$… (Umfang halbiert sich)

Formel für den Umfang der **Innen**dreiecke: $\boxed{U_k = 3 \cdot (\frac{1}{2})^k \cdot a}$ $\quad k \in \{1, \dots, \infty\}$ [k=0 Startdreieck]

b) Flächeninhalt vom Dreieck: $\frac{g \cdot h}{2}$

[Berechnung der angegebenen Höhe über den Satz des Pythagoras möglich: $16^2 + h^2 = 32^2$]

$A_0 = \frac{32 \cdot 16 \cdot \sqrt{3}}{2} = 16^2 \cdot \sqrt{3} = 256 \cdot \sqrt{3} \approx \boxed{443{,}4}$ $\quad$ <= Flächeninhalt des Außendreiecks in cm

(Vorüberlegungen zur Überprüfung: In ein großes Dreieck passen immer vier kleine Dreiecke. => $A_k = A_{k-1} : 4$)

Die Höhe halbiert sich (es passen zwei kleinere Dreiecke übereinander).

Flächeninhalt für das k-te Innendreieck: $\boxed{A_k = \frac{32 \cdot (\frac{1}{4})^k \cdot 16 \cdot \sqrt{3}}{2}}$

c) 120.000:24.000 = 5 (Menge halbiert sich in der Zeit 5 Mal) => 25 kg : $2^5 = \frac{25}{32}$ kg = 0,78125 kg = 781,25 g

Formel abhängig von der Anfangsmenge a der Zeit t: $a \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{24000}}$, t = Zeit in Jahren

Noch übrige Menge nach z.B. 65 Jahren: 25 kg $(\frac{1}{2})^{\frac{65}{24000}} \approx \boxed{24{,}953\text{ kg}}$

d) Größe nach k Tagen = $\boxed{1{,}68\text{ m} \cdot (1/3)^k}$

Lösen der Gleichung 1 mm ≥ 1680 mm · $(1/3)^k$ durch Probieren: $\quad$ 1680 mm · $(1/3)^7 \approx$ 0,768 mm

Nach <u>7 Tagen</u> ist Draco kleiner als 1 mm.

Hilfen

Hilfe 1

Definition 1: Potenz mit positivem Exponent: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$, $a^0 = 1$ ($a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$)

Definition 2: Potenz mit negativem Exponent: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$)

Hilfe 2

Gewichtseinheit	Bezeichnung	Umrechnung
1t	**Tonne**	1t = 10dt
1dt	**Dezitonne**	1dt = 100kg
1kg	**Kilogramm**	1kg = 1000g
1g	**Gramm**	1g = 1000mg
1mg	**Milligramm**	1mg = 1000µg
…	**…**	…

Längeneinheit	Bezeichnung	Umrechnung
1km	**Kilometer**	1km = 1000m
1m	**Meter**	1m = 10dm
1dm	**Dezimeter**	1dm = 10cm
1cm	**Zentimeter**	1cm = 10 mm
1mm	**Millimeter**	1mm = 1000µm
…	**…**	…

Hilfe 3

Zehnerpotenzen – Vorsilben

Die Zahlen 10, 100, 1 000 usw. schreibt man häufig übersichtlich als Potenz der Zahl 10.

		$10 = 10^1$
		$100 = 10^2$
		$1\,000 = 10^3$
		$10\,000 = 10^4$
		$100\,000 = 10^5$
1 Million	=	$1\,000\,000 = 10^6$
1 Milliarde	=	$1\,000\,000\,000 = 10^9$
1 Billion	=	$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$
1 Billiarde	=	$1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$
1 Trillion	=	$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$

Hilfe 4

1) Hast du die Einheiten m und mm schon angeglichen?
2) Wie viele Sekunden hat ein Tag?

Hilfe 5

Potenzgesetz für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

(P1) $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ für $a \neq 0$ und $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$

Man multipliziert Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Exponenten addiert. Die Basis bleibt erhalten.

Beispiele: $2^{-3} \cdot 2^5 = 2^{-3+5} = 2^2 = 4$; $u^{-2} \cdot u^{-3} = u^{(-2)+(-3)} = u^{-5}$ für $u \neq 0$

Potenzgesetz für die Division von Potenzen mit gleicher Basis

(P1*) $\mathbf{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ für $a \neq 0$ und $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$

Man dividiert Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Exponenten subtrahiert. Die Basis bleibt erhalten.

Beispiele: $\frac{2^6}{2^{-4}} = 2^6 : 2^{-4} = 2^{6-(-4)} = 2^{10} = 1\,024$; $\frac{x^{-2}}{x^{-5}} = x^{(-2)-(-5)} = x^3$

Hilfe 6

1) Hast du die Elemente des Terms schon sortiert, um die Potenzgesetze anwenden zu können?
2) Kannst du im Anschluss noch kürzen?

Hilfe 7

Potenzgesetz für die Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten

(P2) $\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$ für $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$

Man multipliziert Potenzen mit gleichem Exponenten, indem man die Basen multipliziert. Der Exponent bleibt erhalten.

Beispiele: $4^3 \cdot 25^3 = (4 \cdot 25)^3 = 100^3 = 1\,000\,000$; $x^{-2} \cdot y^{-2} = (x \cdot y)^{-2}$ für $x \neq 0$, $y \neq 0$

Potenzgesetz für die Division von Potenzen mit gleichem Exponenten

(P2*) $\mathbf{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$ für $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$

Man dividiert Potenzen mit gleichem Exponenten, indem man die Basen dividiert. Der Exponent bleibt erhalten.

Beispiele: $\frac{6^{-4}}{3^{-4}} = \left(\frac{6}{3}\right)^{-4} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$; $\frac{y^{-2}}{z^{-2}} = \left(\frac{y}{z}\right)^{-2}$

Hilfe 8

Potenzgesetz für das Potenzieren einer Potenz

(P3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ für $a \neq 0$ und $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$

Man potenziert eine Potenz, indem man die Exponenten multipliziert. Die Basis bleibt erhalten.

Beispiele: $(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$; $(x^2)^k = x^{2k}$ für $x \neq 0$; $(z^{-2})^{-3} = z^6$ für $z \neq 0$

Hilfe 9
Distributivgesetz:
Jedes Glied der einen Klammer wird mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert. Die so entstandenen Produkte werden addiert.
Beispiel:

$(2 + 3) \cdot (3 + 1) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 + 2 + 9 + 3 = 20$

Hilfe 10
1) Wie lang ist die Seitenlänge des größeren Dreiecks im Vergleich zum kleineren Dreieck?
2) Versuche den Umfang der immer kleineren Dreiecke mit Hilfe der Seitenlänge des Ausgangsdreiecks (32 cm) darzustellen.

Hilfe 11
1) Wie lautet die Formel zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Dreiecks?
2) Verfahre wie in a) und versuche den Flächeninhalt der immer kleineren Dreiecke unter Verwendung der Höhe und der Seitenlänge des Ausgangsdreiecks darzustellen.

Hilfe 12
1) Zur Erinnerung: Die Halbwertszeit ist die Zeit, nach der noch die Hälfte vorhanden ist.
2) Wie viele Male halbiert sich die gefundene Menge innerhalb der 120.000 Jahre?

Hilfe 13
Versuche die Größe mit Hilfe der ursprünglichen Körpergröße von Draco darzustellen. Wie groß ist Draco nach einem, zwei, drei, vier Tagen. Wie groß ist er an einem beliebigen k-ten Tag?

Literatur/Quellen

[1] Bruder, Regina: Ein Unterrichtskonzept für einen binnendifferenzierenden Mathematikunterricht. [Vortrag auf der 19. Fachtagung Mathematik am 23.03.2011 am Kardinal-von-Galen-Gymnasium in Hiltrup]. 2011.

[2] Elemente der Mathematik 9. Auflage A1. Hrsg. von Heinz Griesel, Helmut Postel, Friedrich Suhr. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH 2009. S. 169 – 192.

[3] Gymnasium St. Michael – Fachbereich Mathematik: Schulinternes Curriculum Mathematik Sekundarstufe I. 2011. S. 39.

[4] Honig, Jürgen: Mathematik 9. Aufgaben: Potenzfunktion. http://hw.grehoen-design.de/pages/mathematik/mathematik-9/aufgaben-potenzfunktion.php (Abfragedatum 29.03.2011)

[5] Kronenberg, Andreas: Plutonium. http://kernenergie-wissen.de/plutonium.html (Abfragedatum 29.03.2011).

[6] Skalli, Sami: Fukushima. Plutonium nach Kernschmelze entdeckt. In: Zeit Online. 28.03.2011. http://www.zeit.de/wissen/umwelt/2011-03/fukushima-kernschmelze-block- zwei (Abfragedatum 29.03.2011).